- 108 - ENSI DE CHIMIE 1980 (Nad P')

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

I

(8 points sur 20)

a étant une constante réelle, u_0 et v_0 étant des constantes complexes, les suites u_n et v_n sont définies par la donnée de leur premier terme u_0 et v_0 et par les relations de récurrence :

$$u_n = 2\,au_{n-1} - v_{n-1}$$

$$v_n = u_{n-1}$$

1° Montrer que l'ensemble décrit par $w_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ quand (u_0, v_0) décrit $\mathbb{C}^2$, a étant fixé, et sur lequel sont définies les opérations usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Quelle est la dimension de cet espace ? (On justifiera la réponse.)

2° Lorsque $a = 1$ montrer que la suite u_n est une suite arithmétique et calculer u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

3° Exprimer de même les termes généraux des deux suites dans le cas $a = -1$. On pourra utiliser la suite auxiliaire $u'_n = (-1)^n\, u_n$.

4° On suppose à présent $a \notin \{-1, +1\}$.
On constate que $w_n = A \cdot w_{n-1}$, A étant une matrice d'ordre 2.

Quelles sont les valeurs propres de A ?

Calculer A^n.

On suppose que $v_0 = 1$ et qu'il existe un réel t tel que $a = u_0 = \cos t$. Exprimer alors w_n en fonction de n et de t.

Tournez la page S. V. P.

II

(1,5 point sur 20)

1° Former l'équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants vérifiée par la fonction f de la variable réelle t telle que $f(t) = \cos(n+1)t$.

2° Que devient cette équation différentielle si on y effectue le changement de variable $t = \text{Arc cos } x$?

III

(5,5 points sur 20)

1° On considère l'équation différentielle :

$$E : (1 - x^2)y'' - xy' + \lambda^2 y = 0$$

dans laquelle λ désigne une constante réelle positive ou nulle.

Intégrer cette équation lorsque $\lambda = 0$.

2° On suppose à présent $\lambda \neq 0$. On se propose de chercher des fonctions développables en série entière qui soient solutions de l'équation E dans un intervalle contenant 0 :

$$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

En supposant l'existence d'une telle série, former une relation de récurrence entre les coefficients puis les calculer en fonction de a_0 et a_1.

3° Est-il possible qu'à partir d'un certain rang tous les termes de la série soient nuls ?

Y est alors un polynôme; est-il solution de E ? La réponse devra être donnée avec toutes les justifications.

Déterminer ce polynôme pour λ appartenant à l'intervalle $[4, 5[$.

4° Montrer que la série obtenue au 2° est convergente sur $]-1, +1[$.

IV

(5 points sur 20)

1° Calculer dans chaque intervalle où elle est définie, l'intégrale :

$$\int \frac{dx}{(2x^2 - 1)^2 \sqrt{|1 - x^2|}}$$

2° On suppose ~~dans cette question~~ $\lambda = 2$.

Montrer que l'équation E admet pour solution particulière un polynôme $P(x)$ tel que $P(0) = -1$.

Calculer l'intégrale générale de E en posant $y = z.P(x)$.

3° Déterminer la fonction g, continue et bornée sur $\mathbb{R}$, telle que

$g(1) = -1$ et $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$

et dont la restriction à $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ est solution de E.

4° Construire la courbe représentative de la fonction g.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail